

Adı Soyadı:
Numarası:

01.12.2022

2022-2023 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I ARASINAV SORULARI

1) a) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a|c, b|c$ ve $(a, b) = d$ ise $ab|cd$ olduğunu gösteriniz.

b) 47^{100} sayısının 29 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

2) a) b pozitif tam sayısı için $(b, 15) = 1$ ise $b^4 \equiv 1 \pmod{15}$ olduğunu gösteriniz.

b) a, b pozitif tam sayıları için a, b 'ye bölündüğünde kalan r ($r \neq 0$) ise $(a, b) = (b, r)$ olduğunu gösteriniz.

3) a) G çarpımsal bir grup ve $x, y \in G$ olsun. $y^3 x^{-1} (xy^{-2})^3 y^2 x^{-1} y^2$ elemanını en basit biçimde yazınız.

b) G bir grup A ve B , G 'nin alt grupları olsun. $AB \leq G$ ise $AB = BA$ olduğunu gösteriniz.

4) a) Sıfırdan farklı iki tam sayının en büyük ortak böleni vardır, gösteriniz.

b) G bir grup ve $x \in G$ ve $o(x) = m$ olsun. Her $k \in \mathbb{Z}^+$ için $(k, m) = d$ ise $o(x^k) = \frac{m}{d}$ olduğunu gösteriniz.

5) a) S_9 da $\alpha = (3\ 1\ 4\ 6\ 9\ 7\ 8\ 2)(5\ 9)(7\ 3\ 8)$ permütasyonu veriliyor. Bu permütasyonun mertebesini bulunuz ve ikili devirlerin çarpımı biçiminde yazıp tek ve çiftliğini belirtiniz.

b) S_4 de $\alpha = (1\ 4)(2\ 3)$ permütasyonu veriliyor. α 'nın merkezleştiricisini bulunuz.

BAŞARILAR
Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahtarı

1 - a) $a|c \Rightarrow c=aa'$, $b|c \Rightarrow c=bb'$ ve $(a, b)=d$ ise $ax+by=d$ olacak şekilde $a', b', x, y \in \mathbb{Z}$ var.

$$cd = acx + bcy = a(bb')x + b(aa')y = ab(b'x + a'y) \\ \Rightarrow abled \text{ bulunur.}$$

b) $47^{100} \equiv x \pmod{29}$ $18^{100} \equiv x \pmod{29}$

$(18, 29)=1$ ve $\varphi(29)=28$ olduğundan

$$18^{28} \equiv 1 \pmod{29} \Rightarrow (18^{28})^3 \cdot 18^{16} \equiv (-11)^{16} \equiv 11^{16} \equiv (121)^8 \\ \equiv 5^8 \equiv 25^4 \equiv (-4)^4 \equiv 4^4 \equiv 6 \pmod{29}$$

2 - a) $(b, 15)=1 \Leftrightarrow (b, 3)=(b, 5)=1$ dir.

$$b^2 \equiv 1 \pmod{3} \wedge b^4 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow b^4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$$

$$3|b^4-1 \wedge 5|b^4-1 \Rightarrow 15|b^4-1 \Rightarrow b^4 \equiv 1 \pmod{15}$$

b) $a=qb+r$, $0 < r < b$ $(a, b)=d$, $(b, r)=t$

olsun $(a, b)=d \Rightarrow d|a \wedge d|b$, $r=a-qb \Rightarrow$

$$d|r \text{ olup } d|b \wedge d|r \Rightarrow d|t^*$$

$$(b, r)=t \Rightarrow t|b \wedge t|r \Rightarrow t|a \text{ olup } t|b \wedge t|a$$

$$\Rightarrow t|d \text{ xx} \Rightarrow t=d \text{ bulunur.}$$

3 - a) $y^3 \bar{x} (x \bar{y}^2 \cdot x \bar{y}^2 \cdot x \bar{y}^2) y^2 \bar{x} y^2 =$

$$\Rightarrow y^3 \bar{x} x \bar{y}^2 x \bar{y}^2 x \bar{y}^2 y^2 \bar{x} y^2 = y^x \text{ bulunur.}$$

b) Defterinizde var

4 - a ve b sıkları defterinizde var

5- a) $\alpha = (31469782)(59)(738)$ ise

$$\alpha = (146957)(23) \quad o(\alpha) = \text{oketk}(6,2) = 6$$

$$\alpha = (17)(15)(19)(16)(14)(23) \quad \text{çift permutasyon}$$

b) $f \alpha f^{-1} = \alpha$ şartını sağlayan permutasyonları bulalım ($M(\alpha) = ?$)

$$\begin{aligned} (f(1)f(4))(f(2)f(3)) &= (14)(23) \\ &= (23)(14) \end{aligned}$$

$$f(1) = 1 \quad 1 \quad 4 \quad 4 \quad | \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3$$

$$f(4) = 4 \quad 4 \quad 1 \quad 1 \quad | \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 2$$

$$f(2) = 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad | \quad 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4$$

$$f(3) = 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad | \quad 4 \quad 1 \quad 4 \quad 1$$

olup 8 tane elemanı vardır.

$$M(\alpha) = \{ I, (23), (14), (14)(23), (12)(34), (1243), (1342), (13)(24) \}$$